福建省第十九届《高等代数》
《线性代数》课程建设研讨会

MPH视角下的
代数与几何课程设置

谈　胜　利
(华东师范大学)

2017年12月30日

一、存在的问题

大学数学课程体系70年基本没有变化过

问题 1：重分析，轻代数，弱几何，不适应现代数学发展的需要，不利于智能社会的需要

问题 2：重逻辑严密，轻数学文化，不利创新意识的培养， 不利于弘扬中国文化

问题 3：重理论，轻实践，理论产生的源泉算法的重要性被忽略，不利学生的数学修养的提高、正确价值观的形成

二、用 HPM 理论解决存在的的问题

HPM理论：

- History & Pedagogy Mathematics
- 将数学史融入到数学教学，
- 按照数学发展的规律进行数学教育

二、用 HPM 理论解决存在的的问题

1：展现数学（思想）的形成过程

问题驱动 → 数学模型 → 数学技巧 →

数学方法 → 数学理论 → 数学应用

2：还原数学抽象的过程

保留算法中本质的东西，去掉非本质的东西，

体会数学抽象的作用：更广的应用

二、用 HPM 理论解决存在的问题

3：体现数学算法在课程中的重要性

- 算法是许多数学理论产生的源泉，强调算法有利于提高学生的数学修养
- 人工智能、数据科学、信息安全等的需要，"数字中国，智慧社会，……"

二、用 HPM 理论解决存在的的问题

4：使课程体系更加科学合理

- 使数学课程有主线，前后课程自然衔接，比如，代数系列课程的主线是“解方程”

5：使数学文化融入教学，有利于学生创新意识的形成

- “颠覆性创新”

三、HPM理论在代数课程中的应用

1：代数系列课程的**主线**：　解方程

2：高等代数的**算法**：　欧几里得算法

高斯消元法

3：**线性方程组的消元法**：　向量空间理论

矩阵理论

4：求线性方程组的**公式解**：行列式

三、HPM理论在代数课程中的应用

5：高斯消元法的研究： 变量在算法中不重要

线性方程 → 行（列）向量

线性方程组 → 矩阵

多余方程 → 线性表示

独立方程组 → 线性无关

不独立方程组 → 线性无关

三、HPM理论在代数课程中的应用

解多项式方程组

6：**消元法** → 理想，素理想，环论，结式

7：**公式解** → 正规子群，群论，域论

8：**解的存在性** → 希尔伯特零点定理

三、HPM理论在代数课程中的应用

9：1、2次方程组的几何理论 → 解析几何

10：包括无穷远点的几何理论 → 射影几何

10：高次方程组的几何理论 → 代数几何

11：代数概念（消元，等） ←→ 几何概念（投影，锥面，等）

例子 1：向量空间概念的产生：

1、起源：来自解线性方程组。

高斯消元法：三类初等变换

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ \cdots\cdots \\ f_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \end{cases} \qquad (*)$$

2、产生过程

求方程组的不变量，即在初等变换下的不变量。方程在多项式环 $\mathbf{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ 生成的线性子空间 L 就是一个不变量

$$L = L(f_1, f_2, \ldots, f_m) =$$

$$\{ k_1 f_1 + k_2 f_2 + \ldots + k_m f_m \mid k_1, \ldots, k_m \in \mathbf{K} \}$$

3、方程组由该不变量唯一确定

- 该线性空间在方程的初等变换下不变
- 高斯消元法就是去掉多余方程，使得方程组变成独立方程组
- 多余方程：可以由其他方程线性表示
- 独立方程组：没有多余方程的方程组

- 线性方程组无解当且仅当

$$1 \in L(f_1, f_2, \ldots, f_m)$$

即存在数 $k_1, \ldots, k_m \in K$ 使得

$$k_1 f_1 + k_2 f_2 + \ldots + k_m f_m = 1$$

- 线性方程组有解时，两方程组同解，

$$Z(f_1, \dots, f_m) = Z(g_1, \dots, g_s)$$

当且仅当

$$L(f_1, \dots, f_m) = L(g_1, \dots, g_s)$$

- 解空间的维数与方程的不变量的关系

$$\dim Z(f_1, \ldots, f_m) + \dim L(f_1, \ldots, f_m) = n$$

4、抽象出行向量空间

- 多余方程 = 向量的线性表示
- 独立方程组 = 向量组的线性无关
- 不独立方程组 = 向量组的线性相关
- 高斯消元法 = 求向量组的极大无关组
- 线性空间的维数 = 向量空间的维数

5、抽象出列向量空间（与 4 平行）

6、抽象出抽象向量空间

例子 2：向量空间的推广 --环的理想

1、起源: 来自解多项式方程组

消元法：三类初等变换

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \cdots\cdots \\ f_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \qquad (*)$$

2、产生过程

求多项式方程组的不变量，即在初等变换下的不变量。方程在多项式环 $\mathbf{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ 中生成的理想 I 就是一个不变量

$$I = I(f_1, f_2, \ldots, f_m) =$$

$$\{ g_1 f_1 + \ldots + g_m f_m \mid g_i \in \mathbf{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n] \}$$

3、方程组由该不变量唯一确定

- 理想在方程的初等变换下不变
- 希尔伯特零点定理：多项式方程组（*）在复数域中无解当且仅当

$$1 \in I(f_1, f_2, \ldots, f_m)$$

即存在多项式 $g_1, \ldots, g_k$ 使得

$$g_1 f_1 + g_2 f_2 + \ldots + g_m f_m = 1$$

- 多项式方程组有解时，两方程组同解，即

$$Z(f_1, \dots, f_m) = Z(g_1, \dots, g_s)$$

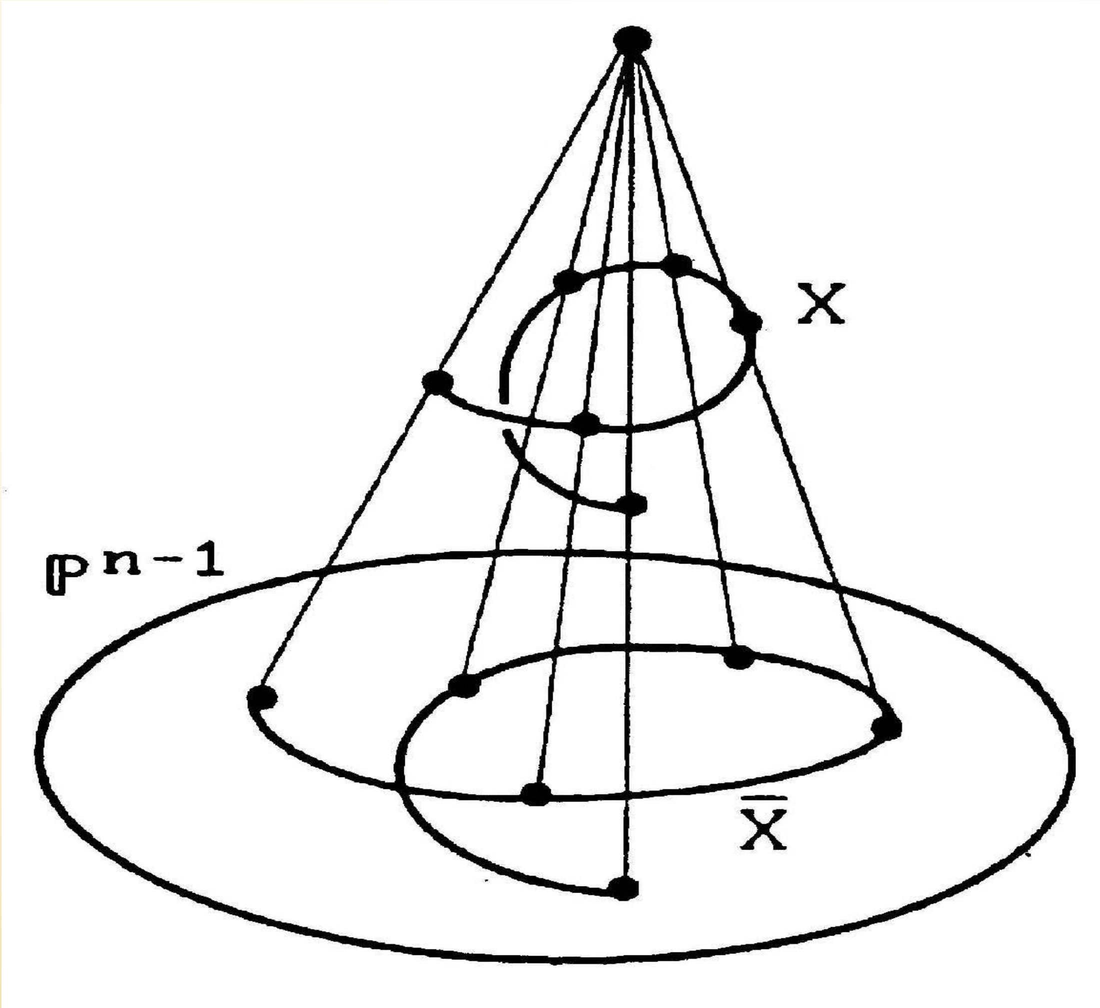
当且仅当它们的根理想相等，

$$\sqrt{I(f_1, \dots, f_m)} = \sqrt{I(g_1, \dots, g_s)}$$

其中 $\sqrt{I} = \{a \in \mathbf{R} \mid$ 存在 m，$a^m \in I\}$

- 解空间的维数与方程的理想的关系

代数上的消元法与几何上的投影



四、几何课程存在的问题

问题：大学里几何的基础课程太弱，只有《空间解析几何》，这门课与现代几何几乎脱节，常把它放在微积分中讲

解决：华东师大用《现代几何基础》代替《空间解析几何》。

1）：解析几何的内容 + 现代数学中出现的常用新二次曲面

2）：直线上、平面上无穷远点的引入 — 射影平面、实（复）二次曲线的射影几何（用现代几何的方法）

3）：流形、拓扑的思想（球面上建立坐标系）、椭圆曲线

五、HPM理论在几何课程中的应用

1：几何（拓扑）系列课程的**主线**:　解方程的几何理论

2：**现代几何的起源**：无穷远点的引入（来自欧洲的画家）

➔ 平面射影几何 （直线与二次曲线）

➔ 复代数曲线（代数函数，曲面的拓扑，黎曼几何）

➔ 复代数曲面（双变量代数函数，代数拓扑（庞加莱））

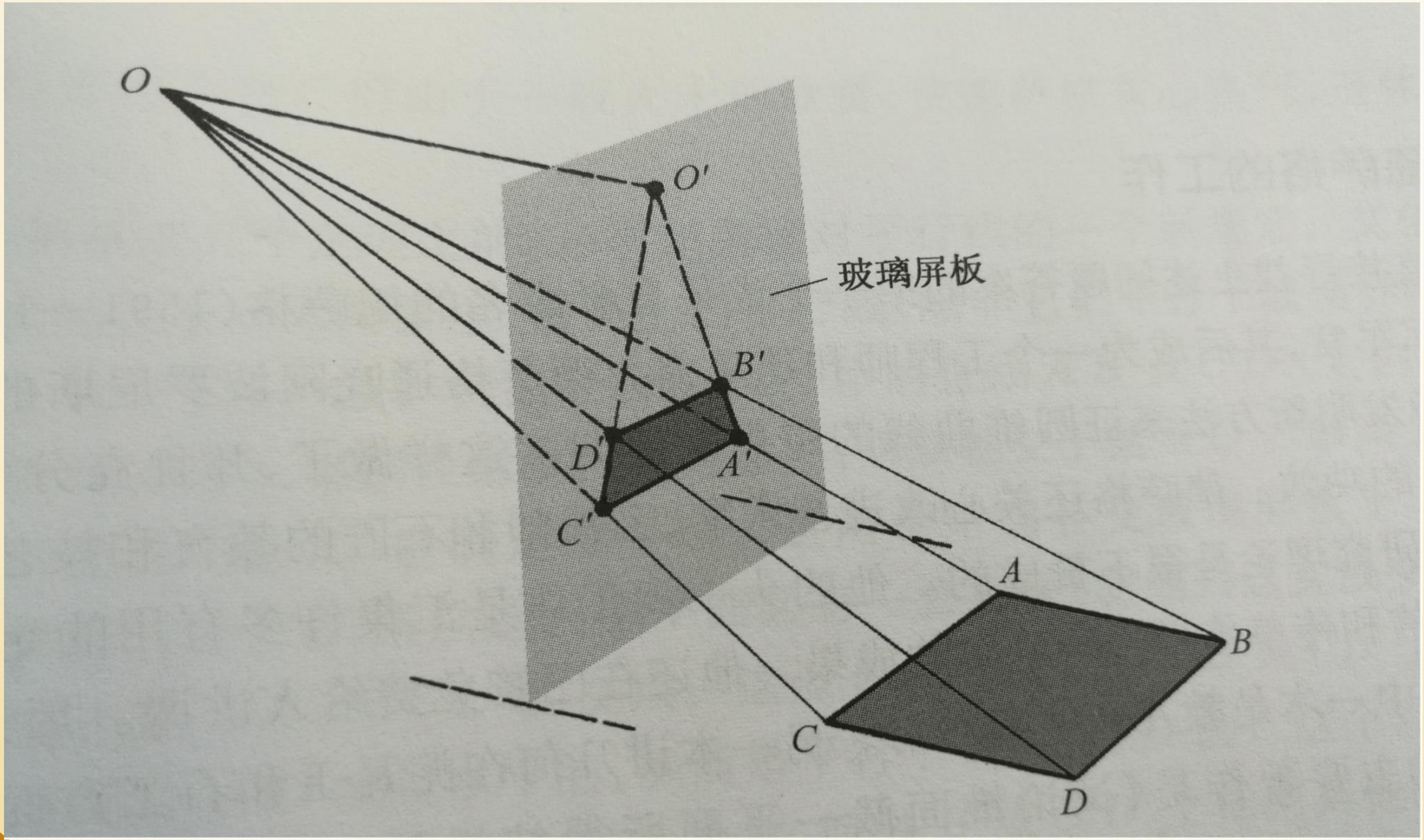
➔ 拓扑学，微分几何，复几何，代数几何，……

3：与微分几何、现代拓扑学、代数几何、复几何相衔接

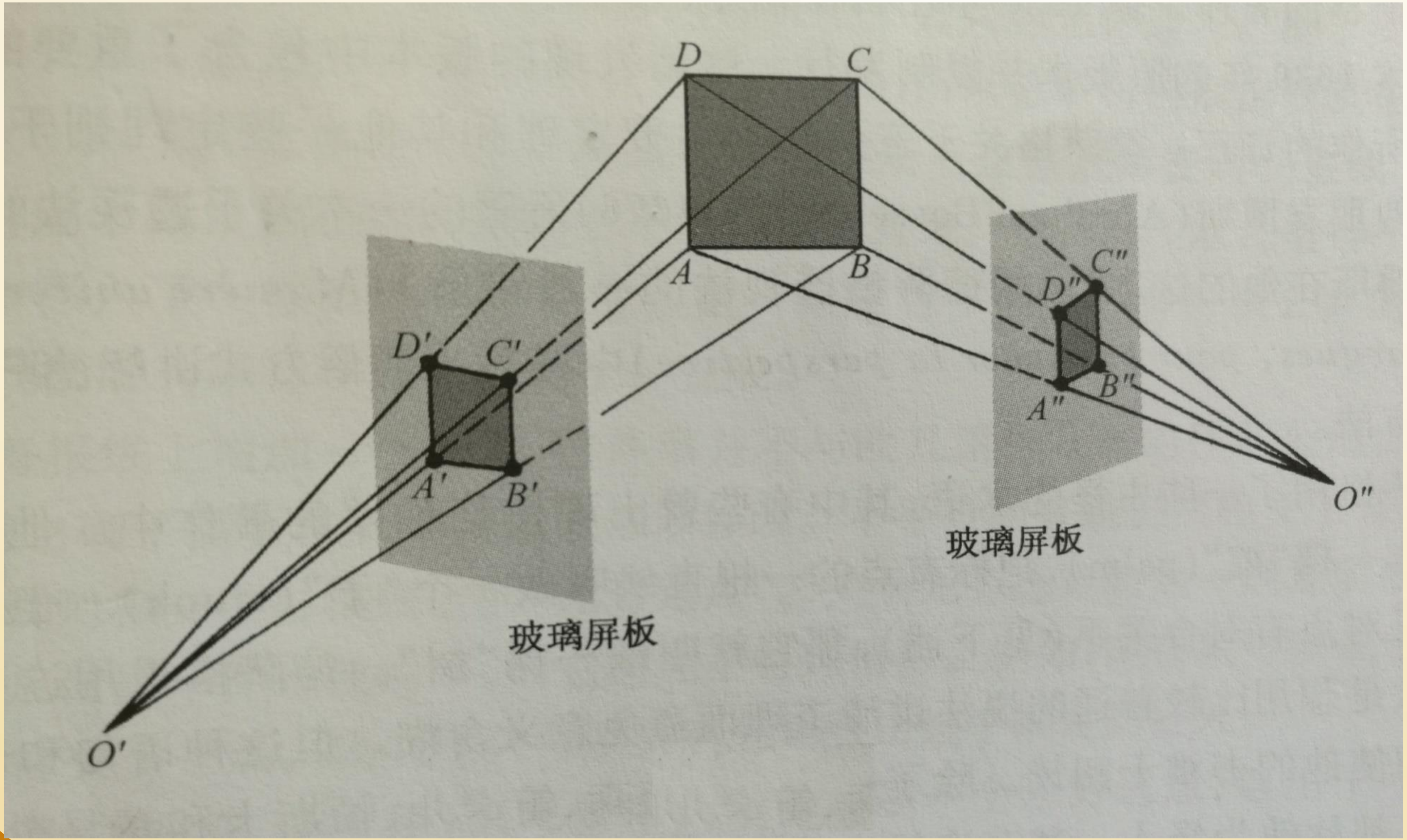
现代几何的起源——透视几何

现代几何的起源——透视几何

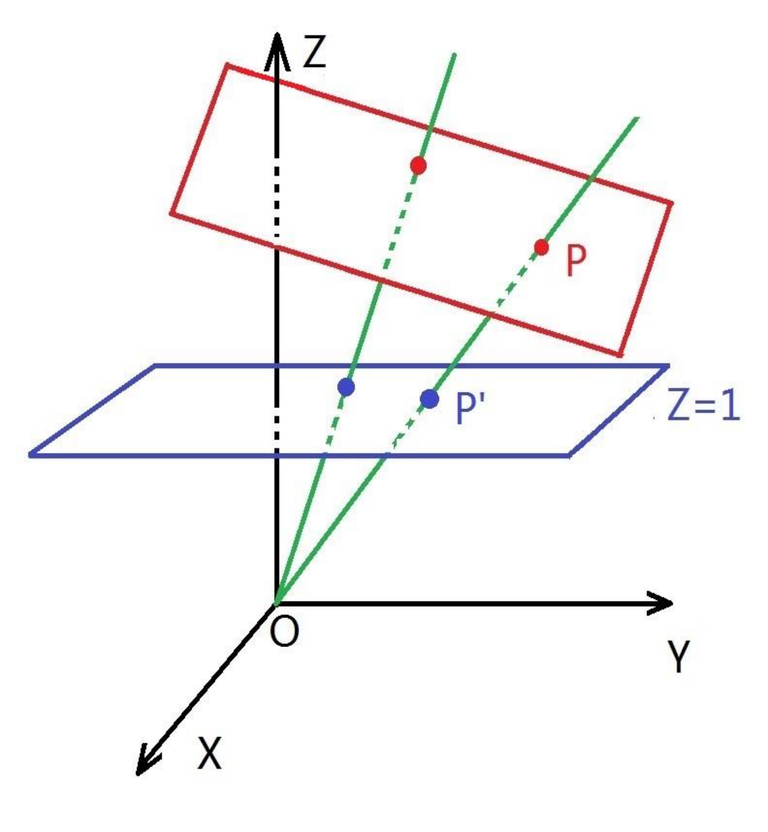
现代几何的起源——透视几何



现代几何的起源——透视几何



透视的数学表示—射影变换

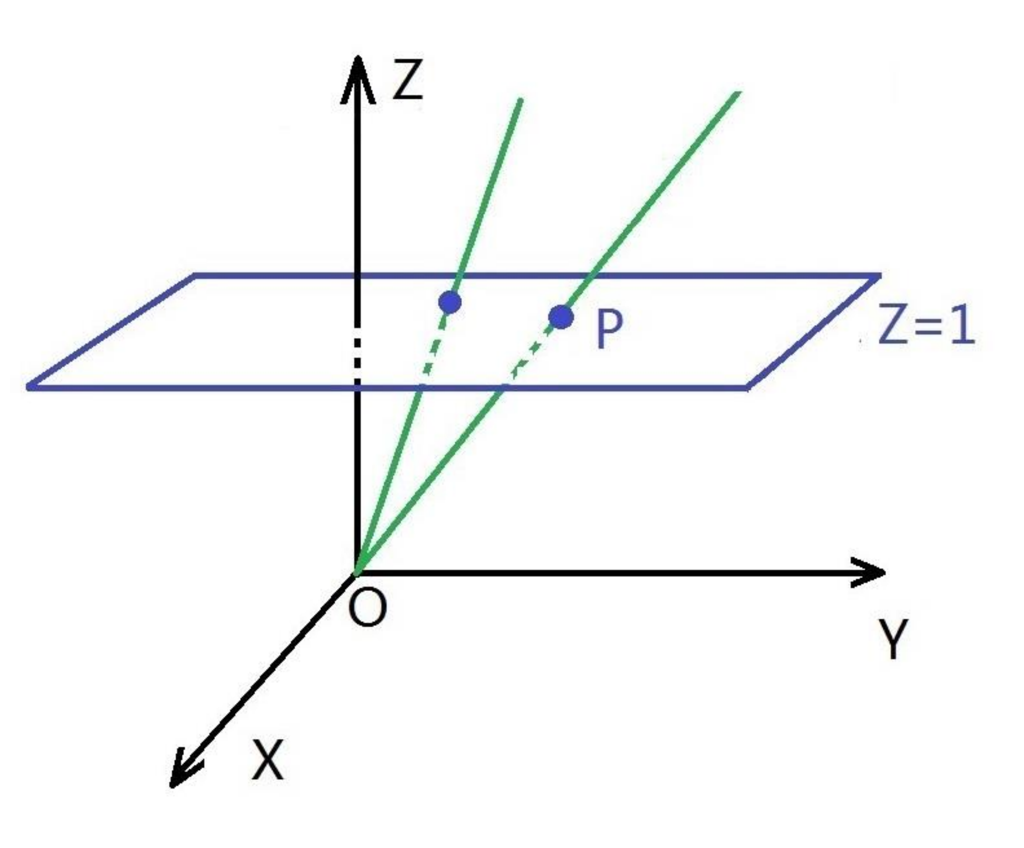


$$x' = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_3x + b_3y + c_3},$$

$$y' = \frac{a_2x + b_2y + c_2}{a_3x + b_3y + c_3}.$$

射影平面的发现

$P^2 =$ 通常平面 R^2 + 无穷远直线 L_∞



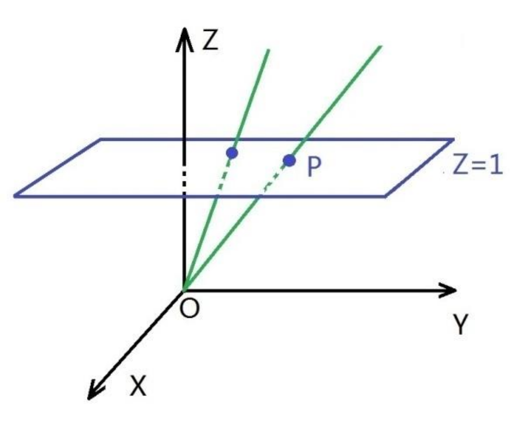
射影平面的齐次坐标的发现

P^2 = 通常平面 R^2 + 无穷远直线 L

= { R^3 中过原点的直线 }

= $\{(at, bt, ct) \mid t$ 参数 $\}$

= $\{[a, b, c] \mid a, b, c$ 不全为 0 $\}$



通常平面的点 (x, y)

$[x, y, 1]$

无穷远点 $[x, y, 0]$

射影变换的齐次坐标表示

$\pi : \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}'^2,$

$$\pi([X, Y, Z]) =$$

$$[a_1X + b_1Y + c_1Z,\ a_2X + b_2Y + c_2Z,\ a_3X + b_3Y + c_3Z],$$

或者

$$\begin{cases} X' = a_1X + b_1Y + c_1Z, \\ Y' = a_2X + b_2Y + c_2Z, \\ Z' = a_3X + b_3Y + c_3Z. \end{cases}$$

限制在通常平面上，$\pi : U_0 \longrightarrow U_0'$，$[x, y, 1] \mapsto [x', y', 1]$，

$$x' = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_3x + b_3y + c_3}, \qquad y' = \frac{a_2x + b_2y + c_2}{a_3x + b_3y + c_3}.$$

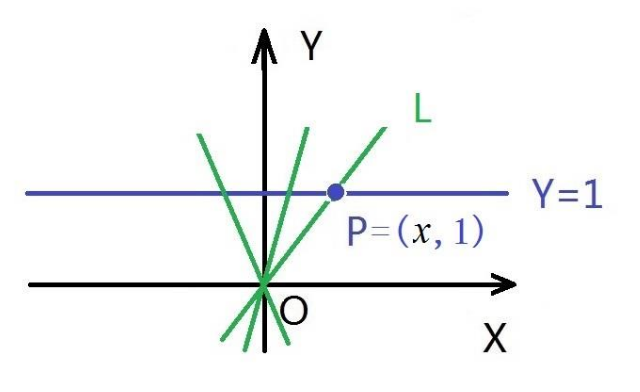
射影直线的发现

$\mathbf{P}^1$ = 通常直线 $\mathbf{R}^1$ + 无穷远点 ∞

= { $\mathbf{R}^2$ 中过原点的直线 }

= { (at, bt) | t 参数 }

= { $[a, b]$ | a, b 不全为 0 }



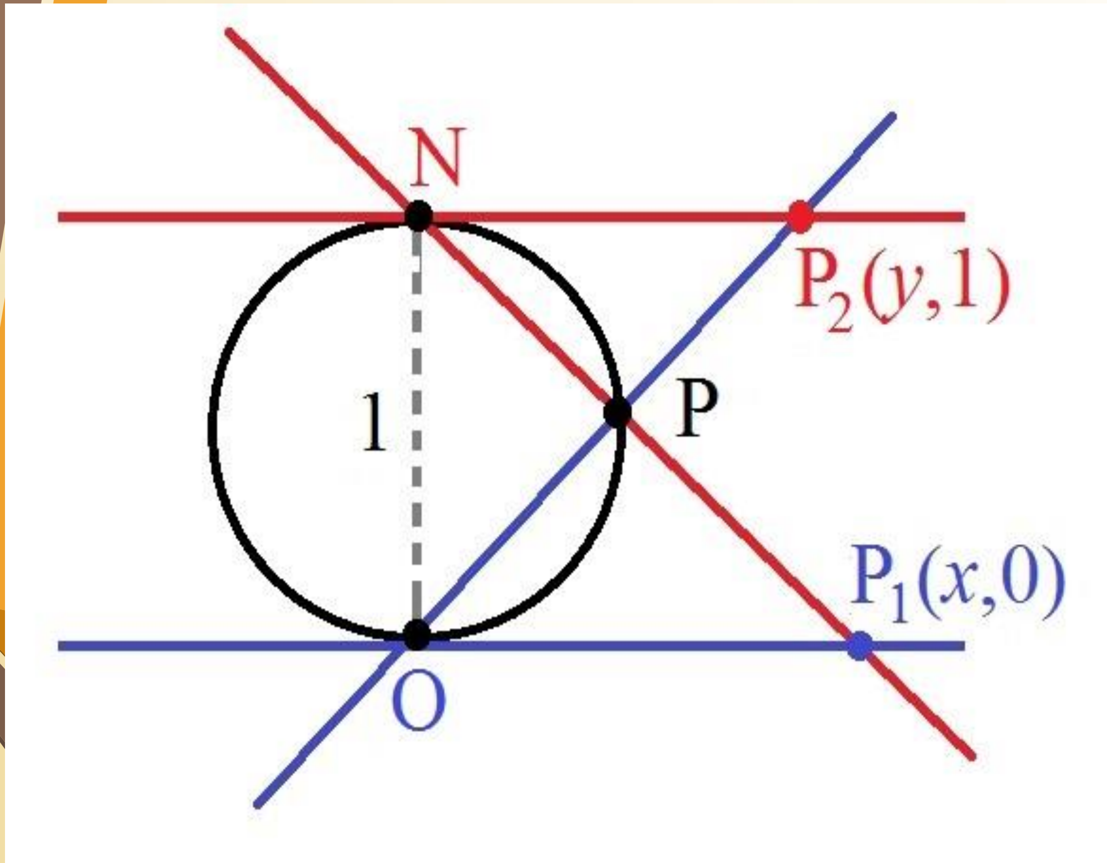
通常直线上的点 x

$[x, 1]$

无穷远点 $[1, 0]$

射影直线的发现

$\mathbf{P}^1$ = 通常直线 $\mathbf{R}^1$ + 无穷远点 ∞



实射影直线的图形是： 圆

U = 圆去掉北极点
可建立坐标系 x

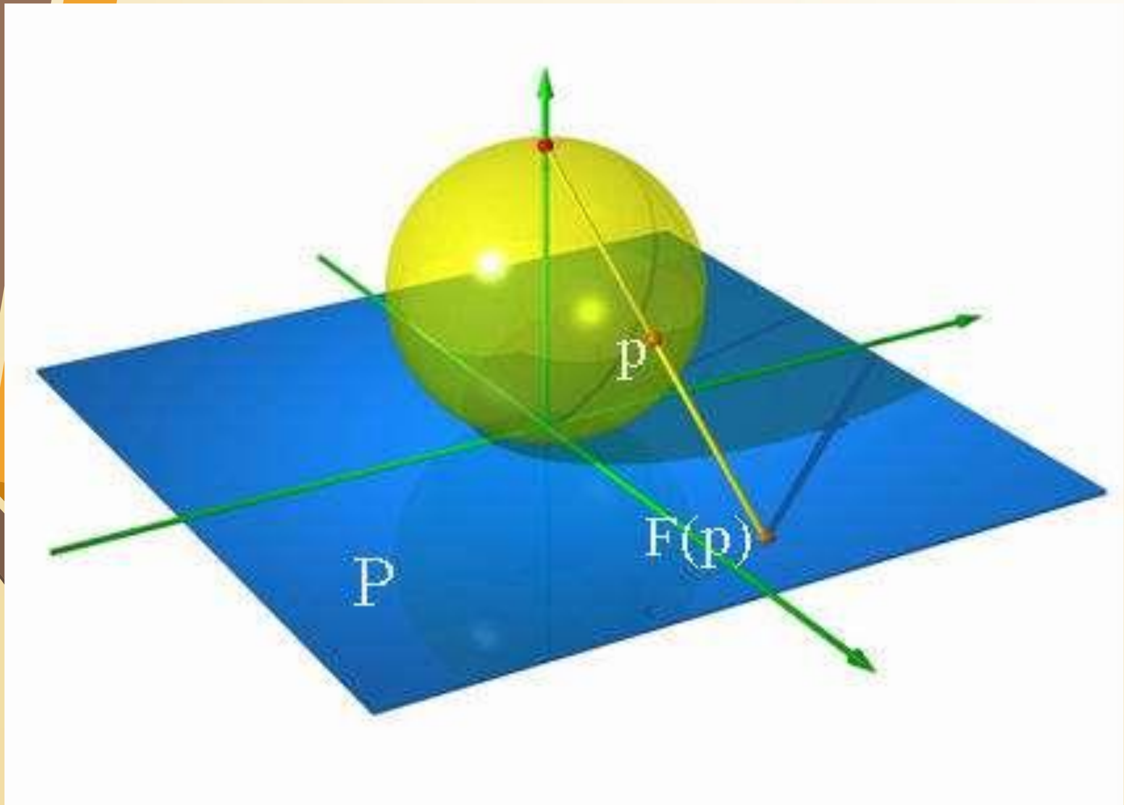
V = 圆去掉北极点
可建立坐标系 y

U 和 V 公共的点的坐标
$y = 1/x$

复射影直线的发现

CP^1 = 复直线 C^1 + 无穷远点 ∞

= { [a, b] | a, b 不全为 0 的复数 }



通常直线上的点 x

$[x, 1]$

无穷远点 ∞ =[1, 0]

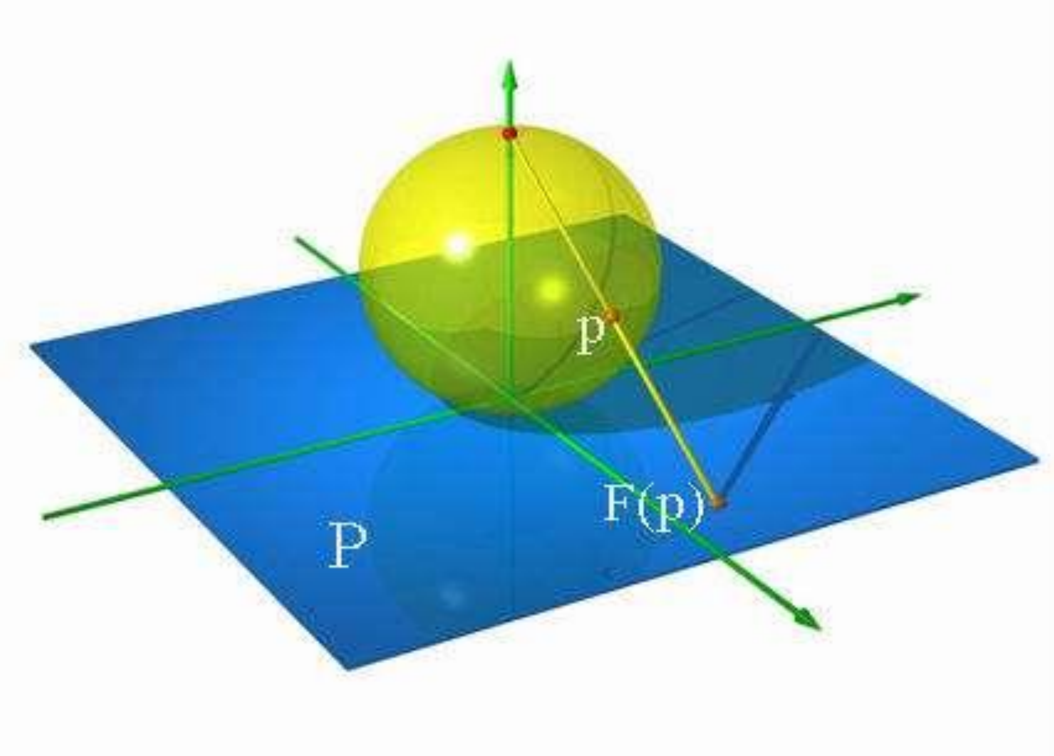
复射影直线的图形是

球面

复射影直线的发现

球面可以建立复数坐标系：

U = 球面去掉北极点； V = 球面去掉北极点



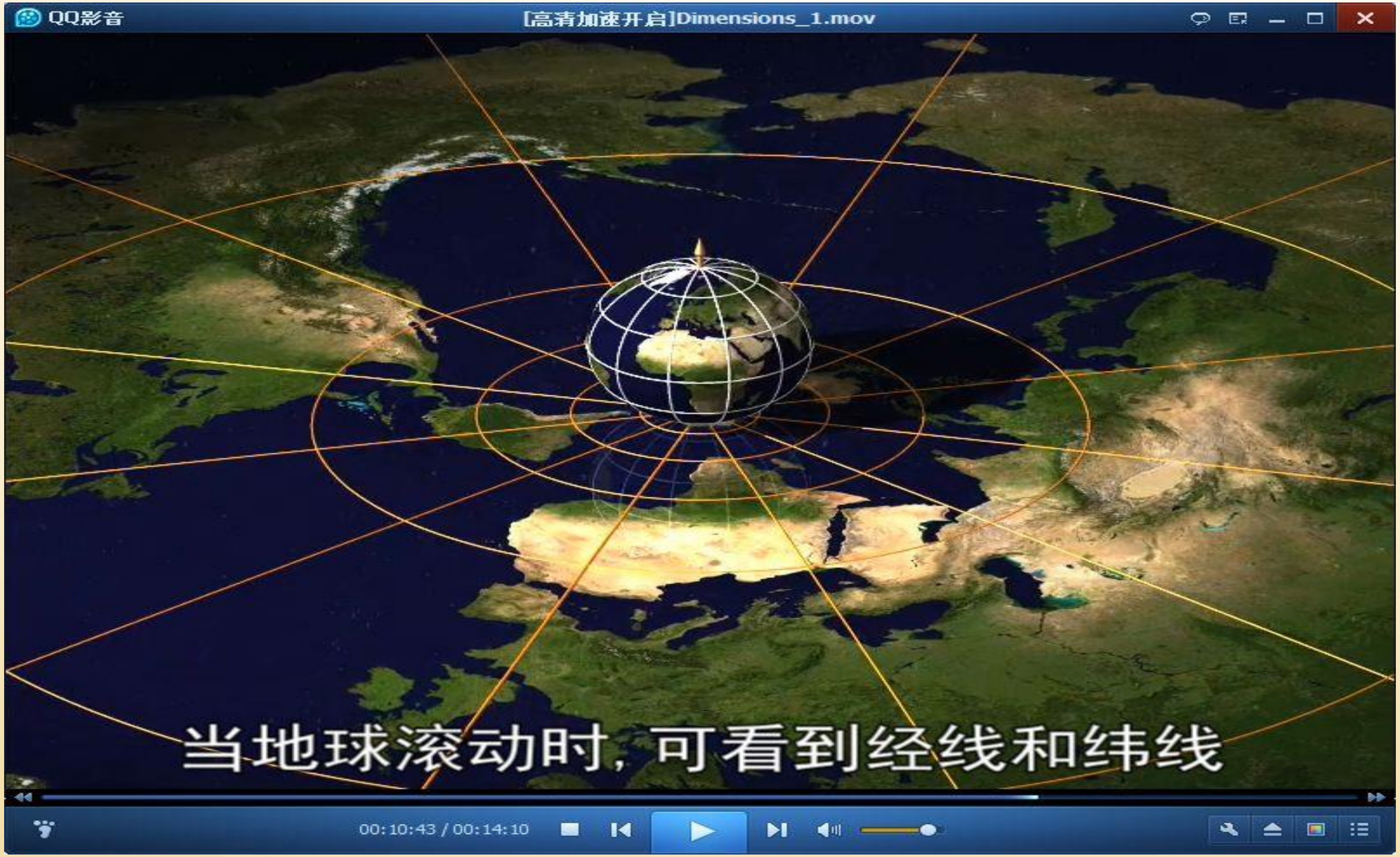
U 上可建立复坐标系： x

V 上可建立复坐标系： y

U 和 V 公共的点的坐标

$y = 1/x$

球极投影画地图


QQ影音
[高清加速开启]Dimensions_1.mov
当地球滚动时，可看到经线和纬线
00:10:43 / 00:14:10

移动北极点可以看到射影直线

欧氏平面上的二次曲线

双曲线:　与 L_∞ 相交两个点的二次曲线

抛物线:　与 L_∞ 相切的二次曲线

椭　圆:　与 L_∞ 不相交的二次曲线

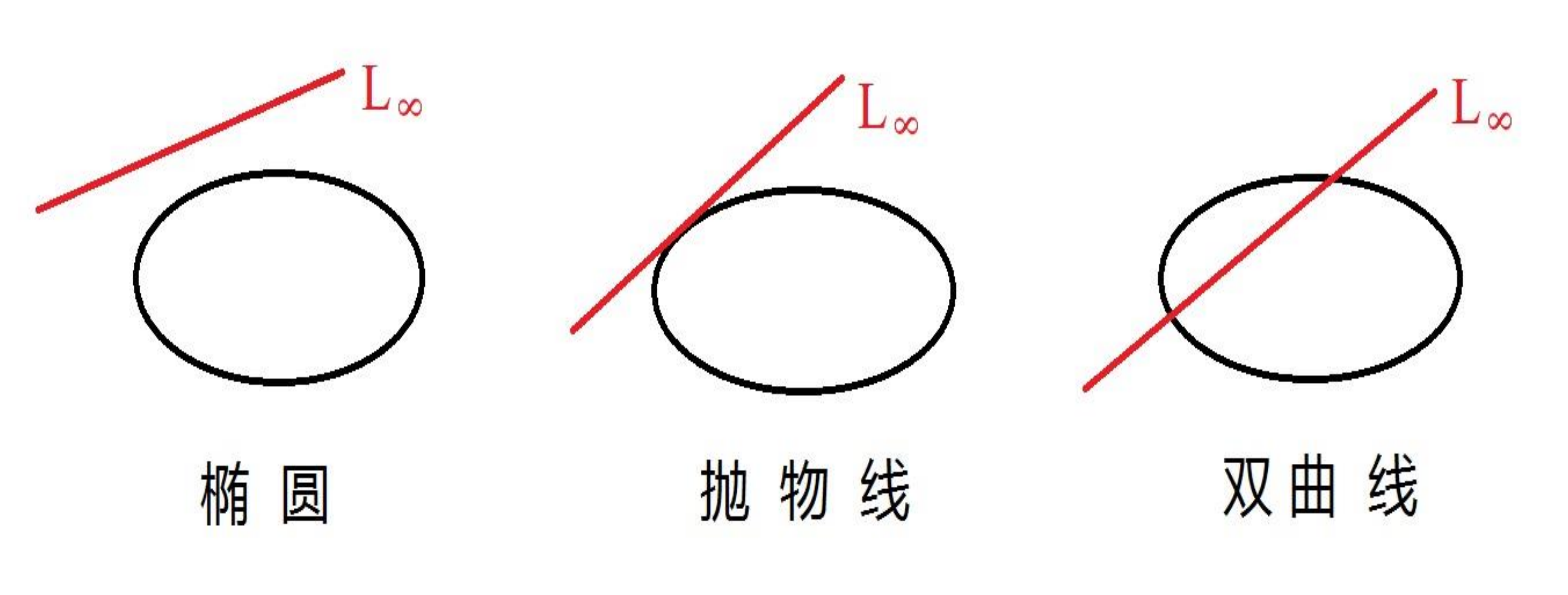
(或者相交于两个虚点)

圆:　与 L_∞ 相交于两个固定虚点的二次曲线

$\infty_1 = [\,1, i, 0\,]$, $\infty_2 = [\,1, -i, 0\,]$

平行线:　相交于无限远处的两直线

欧氏平面上的二次曲线



六、“双一流”建设 -- 人才培养

1. 推动课程中的**文化**建设，建立数学**创新教育**体系；
2. 推动课程的**标准化**建设，建立教学**质量保障**体系；
3. 推动课程的**信息化**建设，建立全**智能化自学**平台；
4. 推动数学**荣誉课程**建设，建立**精英人才**培养体系；
5. 推动课程的**模块化**建设，建立**复合人才**培养体系；
6. 推动**多样化课堂**的建设，建立数学**实践教学**体系；
7. 推动课程的**一体化**建设，建立**因材施教**教学体系。

六、”双一流”建设 -- 人才培养

推动数学荣誉课程建设，建立精英人才培养体系

拔尖人才班模式：培养模式灵活、自由，可因材施教。但受益面小，风险高，系统性、持续性差，不易复制

荣誉课程模式：建设 8-10 门数学荣誉课程，服务精英人才的培养。完成《现代数论》《代数几何》的建设。《代数几何》的基本算法--相交数的计算（消元法）

六、“双一流”建设 -- 人才培养

推动多样化课堂的建设，建立数学实践教学体系

数学原创话剧《物镜天哲》等，制作成录像网上发布，反响热烈。将数学话剧打造成一门数学实践课程。

欢迎各位专家

批评指正！